UNIVERSITÄT BIELEFELD
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

Bachelorarbeit

Relative Kompaktheit von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Der Satz von Prohorov

Reidar Janssen

12.09.2011

Betreuer: Prof. Dr. Michael Röckner,
Florian Conrad
Seminar: Wahrscheinlichkeitstheorie,
Sommersemester 2011
E-Mail: mail at reidar dot de

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Fragestellung, wann eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem metrischen Raum eine schwach konvergente Teilfolge und somit einen Kandidaten für einen schwachen Grenzwert besitzt. Dazu werden wir allgemeiner eine beliebige Teilmenge Π aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem metrischen Raum S *relativ kompakt* nennen, falls jede Folge in Π eine schwach konvergente Teilfolge hat.

Unser Ziel wird der Beweis des Satzes von Prohorov sein, welcher im Jahre 1956 von Yuri Vasilevich Prohorov (geboren 1929 und unter anderem Schüler von Kolmogoroff) erstmalig formuliert und bewiesen wurde und sich mit der Zeit zu folgendem allgemeinen Theorem entwickelte:

Satz (Prohorov)**.** *Sei Π eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem metrischen Raum S.*

(i) Ist Π straff, dann ist Π relativ kompakt.

(ii) Ist S polnisch, so gilt die Umkehrung: Ist Π relativ kompakt, dann auch straff.

Somit stellt der Begriff der *Straffheit* eine hinreichende Bedingung für die gewünschte relative Kompaktheit dar und in polnischen Räumen ist diese Eigenschaft sogar notwendig. Den Begriff der *Straffheit*, einige hinreichende Kriterien hierfür und die *relative Kompaktheit* werden wir am Ende des zweiten Kapitels einführen und anschließend in Kapitel 3 direkt zum Beweis des Satzes von Prohorov übergehen. Abschließend werden wir im vierten Kapitel sehen, welche Auswirkungen dieser Satz auf die Laplace-Transformierten einer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen und die schwache Konvergenz besitzt und welche Bedingungen wir in polnischen Räumen an eine solche Folge stellen müssen, um die schwache Konvergenz zu garantieren.

Die erste Aussage des Satzes wird den Großteil der gesamten Arbeit ausmachen und es finden sich in der Literatur einige Beweisvarianten. Zum Verständnis des hier vorgestellten Beweises sind nur Kenntnisse der Maß- und Integrationstheorie und elementare Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie notwendig. Alle im Beweis verwendeten funktionalanalytischen Ergebnisse werden wir vorweg zu Beginn des zweiten Kapitels – in aller Kürze und auf die nötigste Aussage reduziert – erarbeiten, sodass die Kenntnis der Funktionanalysis nicht von Nöten, aber von Vorteil ist. Wichtige Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie werden wir zum Teil in Erinnerung bringen.

Ebenso beinhaltet das zweite Kapitel den Auswahlsatz von Helly, welcher in der Literatur häufig in Kombination mit dem Satz von Prohorov behandelt wird. Dieser wird es uns ermöglichen, Aussage (i) zunächst im Spezialfall $S = \mathbb{R}$ beweisen zu können, auch wenn dies für den allgemeinen Beweis von (i) nicht notwendig ist.

2. Vorbereitungen

Im Folgenden sei $(S, \mathcal{S})$ stets ein metrischer Raum mit Metrik d und $\mathcal{S}$ die durch d induzierte Borel-σ-Algebra auf S. Mit $\mathcal{C}_b(S)$ sei die Menge aller stetigen, beschränkten Funktionen $f\colon S \to \mathbb{R}$ gegeben. $\mathcal{M}_1(S)$ sei die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(S, \mathcal{S})$. Abkürzend werden wir die Schreibweise W'Maß verwenden.

2.1. Präkompaktheit

Definition 2.1. $A \subset S$ heißt *total beschränkt* oder *präkompakt*, falls es für alle $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_{n_\varepsilon} \in A$, $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, gibt, sodass gilt:

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} B_\varepsilon(x_j)$$

Diese endliche Überdeckung heißt auch ε-Netz.

Lemma 2.2 ([9, Bemerkung 2.6 (3)])**.** *Ist $A \subset S$ präkompakt, so ist auch $\overline{A}$ präkompakt.*

Beweis. Sei o.B.d.A. $\overline{A} \setminus A \neq \emptyset$. (Im Falle $A = \overline{A}$ ist nichts zu zeigen.) Sei $\varepsilon > 0$. Da A präkompakt ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in A$, sodass $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)$. Dass $\overline{A}$ präkompakt ist, folgt nun direkt aus folgender Behauptung:

$$\overline{A} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_\varepsilon(x_j)$$

Dies ist für $x \in A$ klar. Sei also $x \in \overline{A} \setminus A$, dann existiert ein $y \in A$ mit $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Weil $y \in A$ und A von einem $\frac{\varepsilon}{2}$-Netz überdeckt wird, gibt es ein $1 \leq k \leq n$, sodass $y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_k)$ und somit $d(x_k, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Mit der Dreiecksungleichung folgt nun:

$$d(x, x_k) \leq d(x, y) + d(y, x_k) < \varepsilon.$$

Also erhalten wir $x \in B_\varepsilon(x_k) \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_\varepsilon(x_j)$. $\square$

Bemerkung 2.3. *Es gilt sogar: $A \subset S$ ist präkompakt genau dann, wenn $\overline{A}$ präkompakt ist. Dieses Ergebnis wird im weiteren Verlauf jedoch nicht weiter benötigt und daher nicht bewiesen.*

Satz 2.4 ([6, Satz 1.31]). *Sei $A \subset S$ präkompakt und vollständig. Dann ist A kompakt.*

Beweis. Angenommen A ist nicht kompakt und sei $(O_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine offene Überdeckung von A, für die es keine endliche Teilüberdeckung gibt. Mit der Präkompaktheit können wir A mit Kugeln $B^1, \ldots, B^n$ vom Radius 1 überdecken. Unter diesen muss es nun eine Kugel $B(1, x_0)$ mit Mittelpunkt $x_0 \in A$ geben, welche sich nicht durch endlich viele O_i, $i \in \mathcal{I}$, überdecken lässt. Als Teilmenge einer präkompakten Menge ist $B(1, x_0)$ selbst präkompakt und lässt sich somit durch endlich viele Kugeln mit Radius $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ überdecken. Auch unter diesen Kugeln muss es eine Kugel $B(\frac{1}{2}, x_1)$ mit Mittelpunkt $x_1 \in B(1, x_0)$ geben, welche sich nicht endlich durch alle O_i, $i \in \mathcal{I}$, überdecken lässt. Setzen wir dieses Verfahren iterativ für $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ fort, erhalten wir eine Folge von Kugeln $U_k := B(\frac{1}{2^k}, x_k)$, $k \in \mathbb{N}$, welche sich alle nicht endlich durch die O_i, $i \in \mathcal{I}$, überdecken lassen. Insbesondere folgt durch diese Konstruktion $U_k \cap U_{k+1} \neq \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (sonst gäbe es eine endliche Überdeckung). Damit ist $(x_k)_k$ eine Cauchyfolge in A, denn sei $y \in U_k \cap U_{k+1}$, so folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq d(x_k, y) + d(y, x_{k+1}) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Also existiert der Grenzwert $x \in A$ aufgrund der Vollständigkeit und es gibt ein $j_x \in \mathcal{I}$ mit $x \in O_{j_x}$ und (da es sich bei den O_i um offene Mengen handelt) einen Radius $r > 0$, sodass $B(r, x) \subset O_{j_x}$. Wir können nun $N_r \in \mathbb{N}$ so groß wählen, dass für alle $k \geq N_r$ gilt: $d(x_k, x) < \frac{r}{2}$ und $\frac{1}{2^k} < \frac{r}{2}$. Somit ist $U_k \subset O_{j_x}$ für alle $k \geq N_r$ und wir erhalten einen Widerspruch. □

Das nachfolgende Ergebnis der letzten beiden Sätze ist nötig im Beweis des Satzes von Prohorov und nützlich zur Illustrierung der Straffheit (später).

Folgerung 2.5 ([9, Bemerkung 2.6 (5)]). *Sei S ein metrischer, vollständiger Raum. Ist $A \subset S$ präkompakt, so ist $\overline{A}$ kompakt.*

Beweis. Nach Lemma 2.2 ist $\overline{A}$ präkompakt. Als abgeschlossene Menge eines vollständigen Raumes ist $\overline{A}$ ebenfalls vollständig. Die Behauptung folgt nun aus Satz 2.4. □

Bemerkung 2.6. *Auch in diesem Fall gilt sogar die Äquivalenz: In einem metrischen, vollständigen Raum S ist $A \subset S$ genau dann präkompakt, falls $\overline{A}$ kompakt ist.*

2.2. Separabilität

Definition 2.7. Ein metrischer Raum (S,d) heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare, dichte Teilmenge $T \subset S$ gibt. (Also falls $\overline{T} = S$ gilt.)

Lemma 2.8. *(i) Jedes kompakte $K \subset S$ im metrischen Raum (S,d) ist separabel. (*[6, Satz 1.33]*)*

(ii) Seien $S_1, S_2, \ldots \subset S$ separabel. Dann ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ separabel.

Beweis. (i) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Die Menge der offenen Kugeln $\mathcal{U} = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x) \mid x \in K \right\}$ mit Radius $\frac{1}{n}$ bildet eine offene Überdeckung von K. Somit gibt es wegen der Kompaktheit ein $m_n \in \mathbb{N}$ und Elemente $x_1^{(n)}, \ldots, x_{m_n}^{(n)} \in K$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^{m_n} B_{\frac{1}{n}}(x_j^{(n)})$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Für ein beliebiges $y \in K$ gibt es also einen Index $1 \leq k \leq m_n$ mit $y \in B_{\frac{1}{n}}(x_k^{(n)})$. Damit ist $d(x_k^{(n)}, y) < \frac{1}{n} < \varepsilon$ und $\left\{ x_j^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq m_n \right\}$ abzählbar und dicht in K.

(ii) Sei T_j, $j \in \mathbb{N}$, die dichte Teilmenge von S_j. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ ist als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen selbst abzählbar. Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x \in S_m$. Wegen der Dichtheit gilt $\overline{T_m} = S_m$, also existiert ein $t^{(m)} \in T_m \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ mit $d(x, t^{(m)}) < \varepsilon$. Somit ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ dicht in $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$. □

Für den allgemeinen Beweis des Satzes von Prohorov ist das nachfolgende Lemma grundlegend.

Lemma 2.9 ([1, S. 238])**.** *Sei M eine separable Teilmenge des metrischen Raums (S,d). Dann gibt es eine abzählbare Klasse $\mathcal{A}$ von offenen Mengen mit folgender Eigenschaft: Ist $x \in G \cap M$ und $G \subset S$ offen, so existiert ein $A \in \mathcal{A}$ mit $x \in A \subset \overline{A} \subset G$.*

Beweis. Sei L die abzählbare, dichte Teilmenge von M und setze

$$\mathcal{A} := \{ B_r(l) \mid l \in L, r \in \mathbb{Q}_+ \}, \; \mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap [0, \infty).$$

Da L und $\mathbb{Q}$ abzählbar sind, ist auch $\mathcal{A}$ abzählbar. Sei nun $G \subset S$ offen und $x \in G \cap M$. G ist offen, also existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(x) \subset G$. Wir wählen nun $l \in L$ und $r \in \mathbb{Q}_+$ derart, dass

$$d(x,l) < r < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Nun folgt, dass

$$x \in B_r(l) \subset \overline{B_r(l)} \subset B_\varepsilon(x) \subset G$$

Also ist $\mathcal{A} \ni A := B_r(l)$ die gesuchte offene Menge. $\square$

Definition 2.10. Ein metrischer Raum (S, d) heißt *polnisch*, wenn er vollständig und separabel ist.

2.3. Schwache Konvergenz

Definition 2.11. Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(S, \mathcal{S})$ und $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$. $(\mu_n)_n$ heißt *schwach konvergent gegen* μ, falls für alle $f \in \mathcal{C}_b(S)$ gilt:

$$\int f \, \mathrm{d}\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \int f \, \mathrm{d}\mu$$

Notation: In diesem Falle schreiben wir $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{schwach}} \mu$ oder auch $\mu = \text{w-lim}_{n\to\infty} \mu_n$.

Zur Charakterisierung der schwachen Konvergenz in metrischen Räumen ist das Portemanteau-Theorem ein wichtiges Hilfsmittel auch für den Beweis des Satzes von Prohorov unverzichtbar.

Satz 2.12 (Portemanteau)**.** *Sei μ, $\mu_n \in \mathcal{M}_1(S)$, $n \in \mathbb{N}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\mu = \text{w-lim}_{n\to\infty} \mu_n$.

(ii) Für alle abgeschlossenen Mengen $F \subset S$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \le \mu(F).$$

(iii) Für alle offenen Mengen $G \subset S$ gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \ge \mu(G).$$

(iv) Für alle μ-randlosen Mengen $H \in \mathcal{S}$ (d.h. $\mu(\partial H) = 0$) gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(H) = \mu(H).$$

Beweis. Siehe [4] Satz 1.10.4.

Im Fall $S = \mathbb{R}$ können wir die schwache Konvergenz auch anhand der zugehörigen Verteilungsfunktionen charakterisieren.

Satz 2.13. *Seien μ, μ_n, $n \in \mathbb{N}$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Verteilungsfunktionen F, F_n. Dann konvergieren die μ_n genau dann schwach gegen μ, falls $F_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} F(x)$ in allen Stetigkeitsstellen x von F.*

Beweis. Siehe [4] Satz 1.10.7.

Satz 2.14 ([1, Theorem 2.6]). *Sei $(\mu_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{M}_1(S)$ und sei $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ fest. Es gilt $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{schwach}} \mu$ genau dann, wenn jede Teilfolge $(\mu_{n_k})_k$ eine schwach konvergente Teilfolge $(\mu_{\tilde{n}_k})_k$ besitzt mit $\mu = \text{w-lim}_{k\to\infty} \mu_{\tilde{n}_k}$.*

Beweis. Sei $(\mu_n)_n$ schwach konvergent gegen μ und $(\mu_{n_k})_k$ eine Teilfolge. Dann konvergiert die reelle Folge $(\int f \, \mathrm{d}\mu_n)_n \subset \mathbb{R}$ gegen $\int f \, \mathrm{d}\mu$ für alle $f \in \mathcal{C}_b(S)$, also auch jede Teilfolge. Somit ist $(\mu_{n_k})_k$ schwach konvergent gegen μ.

Zur anderen Richtung: Angenommen $(\mu_n)_n$ konvergiert nicht schwach gegen μ, so existiert ein $f \in \mathcal{C}_b(S)$ mit $\int f \, \mathrm{d}\mu_n \not\to \int f \, \mathrm{d}\mu$. Also existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(\mu_{n_k})_k$, sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\left|\int f \, \mathrm{d}\mu_{n_k} - \int f \, \mathrm{d}\mu\right| > \varepsilon$. Damit ist es jedoch nicht möglich, eine weitere schwach konvergente Teilfolge (gegen μ) zu finden. Wir erhalten einen Widerspruch zur Voraussetzung. ☐

2.4. Auswahlsatz von Helly

Der Auswahlsatz von Helly wird uns im weiteren Verlauf zusammen mit Satz 2.13 eine Möglichkeit bereitstellen, den Satz von Prohorov im Spezialfall $S = \mathbb{R}$ über die zugehörigen Verteilungsfunktionen der Maße zu beweisen. Wichtiger ist jedoch, dass der Beweis auf einem Diagonalfolgenargument beruht, welches in exakt dieser Weise im Satz von Prohorov (allgemeiner Fall) wiederbenutzt wird, um eine schwach konvergente Teilfolge zu finden.

Wir betrachten nun die Menge V aller Verteilungsfunktionen von endlichen Maßen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Da jede Verteilungsfunktion eines endlichen Maßes isoton, rechtsstetig und beschränkt ist und sich zu jeder solchen Funktion ein zugehöriges endliches Maß finden lässt, können wir also

$$V = \{F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid F \text{ rechtsstetig, isoton und beschränkt}\}$$

setzen.

Satz 2.15 (Auswahlsatz von Helly, [2, Satz 13.33]). *Sei $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig beschränkte Folge in V. Dann existiert ein $F \in V$ und eine Teilfolge $(F_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $F_{n_k}(x) \xrightarrow{k\to\infty} F(x)$ in allen Stetigkeitstellen x von F.*

Beweis. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten: Zunächst wird die konvergente Teilfolge mittels eines Diagonalfolgenarguments konstruiert. Anschließend wird das gesuchte F mithilfe dieser Teilfolge angegeben und alle nötigen Eigenschaften gezeigt.

Zu Schritt 1: Wähle eine Abzählung der rationalen Zahlen, also $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$. Mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß folgt, dass die beschränkte Folge reeller Zahlen $(F_n(q_1))_n$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Sei diese (für q_1 konvergente) Teilfolge nun $(F_{n_k^1}(q_1))_k$, so können wir mit dem selben Argument in der Folge $(F_{n_k^1}(q_2))_k$ (welche nicht konvergent sein muss) wieder eine konvergente Teilfolge $(F_{n_k^2}(q_2))_k$ auswählen. Sukzessive erhalten wir also Teilfolgen $(n_k^1)_k \supseteq (n_k^2)_k \supseteq (n_k^3)_k \supseteq \cdots$, sodass $(F_{n_k^l}(q_l))_k$ für jedes $l \in \mathbb{N}$ konvergiert. Wir wählen nun die Diagonalfolge

$$
\begin{array}{rcccccccccl}
n = (& 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & \cdots) \\
n_k^1 = (& & 2, & 3, & & 5, & & 7, & 8, & 9, & \cdots) \\
n_k^2 = (& & 2, & & & 5, & & 7, & & 9, & \cdots) \\
n_k^3 = (& & & & & 5, & & 7, & & 9, & \cdots) \\
\vdots & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

n_k^l	1	2	3	$\cdots$	m	$\cdots$
1	n_1^1	n_2^1	n_3^1			
2	n_1^2	n_2^2	n_3^2			
3	n_1^3	n_2^3	n_3^3			
$\vdots$				$\ddots$		
m					n_m^m	
$\vdots$						$\ddots$

Abbildung 2.1.: Konstruktion der Diagonalfolge d_k (orange)

$d_k := n_k^k$, wie sie auch in Abbildung 2.1 beispielhaft dargestellt ist. Dann konvergiert $(F_{d_k}(q))_k$ für jedes $q \in \mathbb{Q}$.

Zu Schritt 2: Wir betrachten nun $\tilde{F}(q) = \lim_{k\to\infty} F_{d_k}(q)$ für $q \in \mathbb{Q}$ und setzen

$$F(x) = \inf\left\{\tilde{F}(q) \mid q \in \mathbb{Q}, q > x\right\} \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Da $\tilde{F}$ isoton ist, ist F rechtsstetig und isoton. Sei nun x eine Stetigkeitsstelle von F, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ Elemente $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p < x < q$ und $\tilde{F}(p) \geq F(x) - \varepsilon$ und

$\tilde{F}(q) \leq F(x) + \varepsilon$. Mit der Isotonie der F_n folgt nun

$$\limsup_{k\to\infty} F_{d_k}(x) \leq \lim_{k\to\infty} F_{d_k}(q) = \tilde{F}(q) \leq F(x) + \varepsilon \quad \text{und}$$
$$\liminf_{k\to\infty} F_{d_k}(x) \geq \lim_{k\to\infty} F_{d_k}(p) = \tilde{F}(p) \geq F(x) - \varepsilon.$$

Da ε beliebig gewählt wurde, gilt

$$\limsup_{k\to\infty} F_{d_k}(x) \leq F(x) \leq \liminf_{k\to\infty} F_{d_k}(x),$$

also $\lim_{k\to\infty} F_{d_k}(x) = F(x)$. □

2.5. Relative Kompaktheit

Wir orientieren uns an [1, Kapitel 5] und betrachten nun eine beliebige Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\Pi \subseteq \mathcal{M}_1(S)$ und wollen den Begriff der relativen Kompaktheit von Π einführen:

Definition 2.16. Π heißt *relativ kompakt*, falls jede Folge $(\mu_n)_n \subset \Pi$ eine Teilfolge $(\mu_{n_k})_k$ besitzt, welche schwach gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu \in \mathcal{M}_1(S)$ konvergiert.

Bemerkung 2.17. *In der Definition der relativen Kompaktheit wird nicht vorausgesetzt, dass der schwache Grenzwert ν ebenfalls in Π liegen muss. Es sei aber darauf hingewiesen, dass es sich bei ν um ein Maß mit Masse 1 handeln muss, denn eine schwache Konvergenz gegen ein Maß ν mit $\nu(S) < 1$ ergibt keinen Sinn. Dies wird in den Beispielen 2.19 und 2.20 näher diskutiert.*

Beispiel 2.18. Seien μ_n, $n \in \mathbb{N}$, W'Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit zugehörigen Verteilungsfunktionen F_n. Wir betrachten die Menge $\Pi = \{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sei $(F_{n_k})_k$ die Folge der Verteilungsfunktionen einer beliebigen Folge in Π. Da diese gleichmäßig beschränkt ist, gibt es nach Satz 2.15 (Helly) eine Teilfolge $(F_{\tilde{n}_k})_k$ von $(F_{n_k})_k$ und ein isotones, rechtsstetiges, beschränktes $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$(F_{\tilde{n}_k})_k \xrightarrow{k\to\infty} F(x) \text{ in allen Stetigkeitsstellen } x \text{ von } F.$$

Es gilt $0 \leq F(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und angenommen, wir können zeigen, dass $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ und $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ gilt, so ist F die Verteilungsfunktion eines

W'Maßes ν. Mit Satz 2.13 folgt nun, dass $\mu_{\tilde{n}_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{schwach}} \nu$, also besitzt die (beliebig gewählte) Folge $(\mu_{n_k})_k \subset \Pi$ eine schwach konvergente Teilfolge und unter dieser Annahme ist Π relativ kompakt.

Beispiel 2.19 (Auswandern von Masse)**.** Wir betrachten die Menge aller Dirac-Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ in den Punkten $n \in \mathbb{N}$, also $\Pi = \{\delta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Da mit $k \to \infty$ jedoch der Punkt mit der gesamten Masse einer Folge $(\delta_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \Pi$ immer weiter auswandert, ist

$$F(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

der einzig mögliche schwache Grenzwert für die zugehörigen Verteilungsfunktionen, doch dieser liegt das Nullmaß zugrunde. Wir können sogar überhaupt keinen schwachen Grenzwert finden. Denn angenommen es gibt eine schwach konvergente Teilfolge $\delta_{\tilde{n}_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{schwach}} \nu$, so gilt $\nu(-l,l) \leq \liminf_{k\to\infty} \delta_{\tilde{n}_k}((-l,l)) = 0$ für alle $l \in \mathbb{R}$. Also kann ν kein W'Maß sein. Wir haben also gesehen, dass die gesamte Masse ins Unendliche ausgewandert und Π nicht relativ kompakt ist.

Beispiel 2.20 (Masseverlust)**.** Es kann auch passieren, dass nur ein Teil der Gesamtmasse komplett verloren geht. Sei dazu ω_n, $n \in \mathbb{N}$, die Gleichverteilung über $[-n, n]$ und setze

$$\mu_n = \begin{cases} \delta_0, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{2}{3}\omega_n, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann besitzt für $n_k = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, die konstante Folge $\mu_{n_k} = \delta_0$, $k \in \mathbb{N}$, eine schwach konvergente Teilfolge (nämlich sich selbst). Doch falls $n_k = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, nur ungerade ganze Zahlen durchläuft, so ist der einzig mögliche Grenzwert der Verteilungsfunktionen

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{falls } x < 0 \\ \frac{2}{3}, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Wie auch in Beispiel 2.19 ist eine schwache Konvergenz einer Teilfolge $\mu_{\tilde{n}_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{schwach}} \nu$ nicht möglich. Sonst gilt $\nu(-l,l) \leq \frac{1}{3}$ für alle $l \in \mathbb{R}$ und somit ist die Masse von $\frac{2}{3}$ verloren gegangen.

2.6. Straffheit

Wieder sei $\Pi \subseteq \mathcal{M}_1(S)$ eine beliebige Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Die Bedingung der Straffheit liefert uns ein Kriterium, dass das Auswandern und den Verlust von Masse verhindert und die relative Kompaktheit sicherstellt. Dies wird im nächsten Kapitel durch den Satz von Prohorov bewiesen. Deshalb wollen wir in diesem Kapitel einige Kriterien für die Straffheit erarbeiten.

Definition 2.21. Π heißt *straff*, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $K_\varepsilon \subset S$ existiert, sodass $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ für alle $\mu \in \Pi$ (bzw. falls $\mu(K_\varepsilon^\complement) \leq \varepsilon$ für alle $\mu \in \Pi$).

Beispiel 2.22 ([2, Beispiel 13.28 (ii)])**.** Sei $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine beliebige Familie von Zufallsvariablen mit Indexmenge $\mathcal{I}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$, deren Erwartungswerte beschränkt sind, d.h.

$$r := \sup \{\mathbb{E}[|X_i|] \mid i \in \mathcal{I}\} < \infty.$$

Dann ist die Menge der Verteilungen $\left\{P \circ X_i^{-1} \mid i \in \mathcal{I}\right\}$ straff. Sei dazu $\varepsilon > 0$ und $K_\varepsilon = [-\frac{r}{\varepsilon}, \frac{r}{\varepsilon}] \subset \mathbb{R}$. K_ε ist kompakt. Mit der Markoff-Ungleichung (siehe z.B. [4, Korollar 1.5.6]) folgt nun für alle $i \in \mathcal{I}$ und $r \neq 0$

$$\left(P \circ X_i^{-1}\right)[K_\varepsilon^\complement] = P[|X_i| > \frac{r}{\varepsilon}] \leq \frac{\varepsilon}{r} \underbrace{\mathbb{E}[|X_i|]}_{\leq r} \leq \varepsilon.$$

Für $r = 0$ ist $\{0\}$ kompakt in $\mathbb{R}$ und es gilt für alle $i \in \mathcal{I}$

$$\left(P \circ X_i^{-1}\right)[\{0\}] = 1 > 1 - \varepsilon.$$

Lemma 2.23 ([4, Bemerkung 10.1.19 (i)])**.** *Sei $\Pi \subset \mathcal{M}_1(S)$ und es gebe $f\colon S \to \mathbb{R}$, sodass die Niveaumengen $\{|f| \leq c\}$ für alle $c \geq 0$ kompakt sind. Gilt zusätzlich*

$$\sup_{\mu \in \Pi} \int |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty,$$

so ist Π straff.

Beweis. Da alle Niveaumengen kompakt sind, können wir mit der Markoff-Ungleichung und $c \neq 0$ folgern:

$$\mu(\{|f| > c\}) \leq \frac{1}{c} \int |f| \, d\mu \leq \frac{1}{c} \sup_{\mu \in \Pi} \int |f| d\mu \xrightarrow{c \nearrow \infty} 0 \quad \forall \mu \in \Pi.$$

$\square$

Lemma 2.24 ([2, Lemma 13.5])**.** *Ist S polnisch und $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$, so existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge K_ε mit $\mu(K_\varepsilon^\complement) \leq \varepsilon$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $\{x_1, x_2, \dots\}$ die dichte Teilmenge von S. Somit gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$S = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{\frac{1}{n}}(x_j).$$

Die Folge $A_k := \bigcup_{j=1}^k B_{\frac{1}{n}}(x_j)$ ist aufsteigend gegen S, also ist die Folge $(S \setminus A_k)_k$ absteigend gegen $\emptyset$ und es gilt $\mu(S \setminus A_k) \xrightarrow{k \to \infty} 0$ wegen der Stetigkeit von oben in 0. Also finden wir für alle n ein $N_n \in \mathbb{N}$, sodass $\mu(S \setminus \bigcup_{j=1}^{N_n} B_{\frac{1}{n}}(x_j)) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$ gilt. Setze

$$L := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^{N_n} B_{\frac{1}{n}}(x_j).$$

Durch diese Konstruktion ist L präkompakt: Für vorgegebenes $\varepsilon_0 > 0$ wählen wir $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} < \varepsilon_0$ und betrachten die Inklusionen $L \subset \bigcup_{j=1}^{N_m} B_{\frac{1}{m}}(x_j) \subset \bigcup_{j=1}^{N_m} B_{\varepsilon_0}(x_j)$. Weil S als polnischer Raum vollständig ist, ist $K := \overline{L}$ nach Folgerung 2.5 kompakt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mu(K^\complement) &= \mu(S \setminus K) \leq \mu(S \setminus L) \\
&\leq \mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (S \setminus \bigcup_{j=1}^{N_n} B_{\frac{1}{n}}(x_j))\Big) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S \setminus \bigcup_{j=1}^{N_n} B_{\frac{1}{n}}(x_j)) \\
&< \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{=1 \text{ (geom. Reihe)}} = \varepsilon
\end{aligned}$$

$\square$

Folgerung 2.25. *Ist S polnisch, so ist jede endliche Familie $\Pi \subset \mathcal{M}_1(S)$ straff.*

Beweis. Sei $N = |\Pi|$ und $\Pi = \{\mu_n \mid n \leq N\}$. Aus Lemma 2.24 folgt, dass $\{\mu_n\}$ straff ist für jedes $n \leq N$. Sei also $\varepsilon > 0$, so gibt es kompakte Mengen $K_{\varepsilon,n}$ mit $\mu_n(K_{\varepsilon,n}) > 1 - \varepsilon$ für alle $n \leq N$. Setze $K_\varepsilon = \bigcup_{n \leq N} K_{\varepsilon,n}$, so ist K_ε wieder kompakt und es gilt für alle $n \leq N$

$$\mu_n(K_\varepsilon) \geq \mu_n(K_{\varepsilon,n}) > 1 - \varepsilon.$$

□

Lemma 2.26 ([3, Lemma (2.6)]). *Sei $\Pi \subset \mathcal{M}_1(S)$ straff und $(\tilde{S}, \tilde{\mathcal{S}})$ ein weiterer metrischer Raum und $h\colon S \to \tilde{S}$ stetig. Dann ist $\left\{\mu \circ h^{-1} \mid \mu \in \Pi\right\}$ straff.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle kompakte Menge $K_\varepsilon \subset S$ mit $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ für alle $\mu \in \Pi$. Wegen der Stetigkeit von h ist $\tilde{K}_\varepsilon = h(K_\varepsilon)$ kompakt und $h^{-1}(\tilde{K}_\varepsilon) \supset K_\varepsilon$. Somit gilt

$$\left(\mu \circ h^{-1}\right)(\tilde{K}_\varepsilon) \geq \mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon.$$

□

3. Der Satz von Prohorov

Sei auch in diesem Kapitel wieder $(S, \mathcal{S})$ ein metrischer Raum mit Metrik d, $\mathcal{S}$ die durch d induzierte Borel-σ-Algebra und $\mathcal{M}_1(S)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(S, \mathcal{S})$.

3.1. Formulierung

Satz 3.1 (Prohorov). *Sei* $\Pi \subseteq \mathcal{M}_1(S)$. *Es gilt:*

(i) Ist Π *straff, dann ist* Π *relativ kompakt.*

(ii) Ist S *zusätzlich polnisch, so gilt die Umkehrung: Ist* Π *relativ kompakt, dann auch straff.*

Wie bereits erwähnt, garantiert die Straffheit also die relative Kompaktheit in metrischen Räumen und in polnischen Räumen gilt sogar die Äquivalenz dieser beiden Eigenschaften. Wir wollen zunächst den einfacheren Teil (ii) beweisen (aus [3, S. 281]).

Beweis von (ii). Wir betrachten folgende Zwischenbehauptung:

(Z) Für jedes $\varepsilon > 0$ und jeden Radius $r > 0$ gibt es endlich viele Kugeln $A_1^{(r)}, \ldots, A_{n_r}^{(r)}$ in S mit Radius r, sodass für alle $\mu \in \Pi$ gilt: $\mu(\bigcup_{j=1}^{n_r} A_j^{(r)}) > 1 - \varepsilon$.

Nun wollen wir folgende Behauptungen zeigen:

(1) *Gilt (Z), so ist* Π *straff.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle für jedes $k \in \mathbb{N}$ endlich viele Kugeln $A_1^{(k)}, \ldots, A_{n_k}^{(k)}$ mit Radius $\frac{1}{k}$, sodass $\mu(\bigcup_{j=1}^{n_k} A_j^{(k)}) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}$ für alle $\mu \in \Pi$ gilt. Wir betrachten nun die Menge

$$K := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n_k} A_j^{(k)}.$$

Wegen $\mu(K^{\mathsf{C}}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(S \setminus \bigcup_{j=1}^{n_k} A_j^{(k)}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$ gilt

$$\mu(\overline{K}) \geq \mu(K) = 1 - \mu(K^{\mathsf{C}}) > 1 - \varepsilon \quad \text{für alle } \mu \in \Pi.$$

Weiterhin ist K ist präkompakt: Ist $\delta > 0$, so existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k_0} < \delta$. Für $1 \leq j \leq n_{k_0}$ betrachten wir die Kugeln $B_j^{(\delta)}$ mit Radius δ und demselben Mittelpunkt wie $A_j^{(k_0)}$. Wegen $\delta > \frac{1}{k_0}$ gilt $A_j^{(k_0)} \subset B_j^{(\delta)}$ und somit überdecken diese Kugeln K, sodass $K \subset \bigcup_{j=1}^{n_{k_0}} A_j^{(k_0)} \subset \bigcup_{j=1}^{n_{k_0}} B_j^{(\delta)}$. Da S nach Voraussetzung vollständig ist, ergibt sich mit Folgerung 2.5 die Kompaktheit von $\overline{K}$.

(2) *Gilt (Z) nicht, so ist* Π *nicht relativ kompakt.*

Beweis. Es existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein Radius $r > 0$, sodass (Z) nicht gilt. Sei $\{q_1, q_2, \dots\}$ die dichte Teilmenge von S und seien $A_i = B(q_i, r)$, $1 \leq i \leq n \in \mathbb{N}$, Kugeln um die dichten Punkte mit Radius r und sei $G_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\mu_n \in \Pi$ mit $\mu_n(G_n) \leq 1 - \varepsilon$ (andernfalls hätten wir dennoch eine Vereinigung von Kugeln gefunden, sodass (Z) gilt).

Behauptung: $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *hat keine schwach konvergente Teilfolge.* Angenommen doch, so gibt es $\nu \in \mathcal{M}_1(S)$ mit $\mu_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{schwach}} \nu$. Mit dem Portemanteau-Theorem (Satz 2.12) folgt für jedes $m \in \mathbb{N}$ und $G_m \subset G_{n_k}$ für hinreichend großes k:

$$\nu(G_m) \leq \limsup_{k\to\infty} \mu_{n_k}(G_m) \leq \limsup_{k\to\infty} \mu_{n_k}(G_{n_k}) \leq 1 - \varepsilon.$$

Jedoch gilt $G_m \uparrow S$ für $m \to \infty$. Somit ist $\nu(S) \leq 1 - \varepsilon < 1$, und dies ist ein Widerspruch zur Wahl von $\nu \in \mathcal{M}_1(S)$.

Mit diesen beiden Behauptungen ist die zweite Aussage des Satzes von Prohorov bewiesen. □

In den nächsten beiden Abschnitte beschäftigen wir uns nur noch mit Aussage (i).

3.2. Beweis von Satz 3.1 (i) im Spezialfall $S = \mathbb{R}$

Wir betrachten zunächst den Fall $S = \mathbb{R}$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\Pi \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ wie in [2, S. 263].

Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Π mit zugehörigen Verteilungsfunktionen $F_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mu_n(]-\infty, x])$. Mit dem Satz von Helly (Satz 2.15) gibt es eine Teilfolge $(F_{n_k})_k$ und ein isotones, rechtsstetiges, beschränktes $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $F_{n_k}(x) \xrightarrow{k} F(x)$ in allen Stetigkeitsstellen x von F. Da jedoch F beschränkt ist und wir nur folgern können, dass $F(\infty) \leq 1$ gilt, müssen wir noch zeigen, dass es sich bei F tatsächlich um die Verteilungsfunktion eines W'Maßes handelt. Mit Satz 2.13 reicht es also noch zu zeigen, dass $F(\infty) \geq \limsup_{k\to\infty} F_{n_k}(\infty)$. Dann konvergieren auch die zugehörigen W'Maße schwach gegen ein W'Maß.

Wir benötigen dazu die Straffheit von Π: Für alle $\varepsilon > 0$ existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\mu_n(\mathbb{R} \setminus [a,b]) \leq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist also für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x > b$

$$F_n(\infty) - F_n(x) = \mu_n(]-\infty,\infty]) - \mu_n(]-\infty,x]) = \mu_n(\underbrace{]x,\infty]}_{\subset\mathbb{R}\setminus[a,b]}) \leq \varepsilon.$$

Sei nun $x > b$ eine Stetigkeitsstelle von F, dann gilt

$$\limsup_{k\to\infty} F_{n_k}(\infty) \leq \limsup_{k\to\infty} F_{n_k}(x) + \varepsilon = F(x) + \varepsilon \leq F(\infty) + \varepsilon$$

wegen der Isotonie von F. Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt nun die Behauptung. □

3.3. Allgemeiner Beweis von Satz 3.1 (i)

3.3.1. Vorwort

In der Literatur existieren zwei gängige Möglichkeiten, den Satz von Prohorov zu beweisen. Die Aussage kann zunächst für $\mathbb{R}^d$ gezeigt werden, anschließend auf den Folgenraum $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ ausgeweitet und letzlich für einen beliebigen, metrischen Raum S durch eine Einbettung in den $\mathbb{R}^\infty$ bewiesen werden. Diese Vorgehensart findet sich beispielsweise im Buch von Durrett [3] und dabei basiert das Hauptargument für den Fall $\mathbb{R}^d$ auf einer verallgemeinerten Version des Satzes von Helly mit Verteilungsfunktionen, welche Werte in $\mathbb{R}^d$ annehmen. Zudem ist der Kolmogoroffsche Erweiterungssatz von Nöten, auf welchen in dieser Arbeit verzichtet werden soll.

Die hier vorgestellte Variante ist in eingen Zügen ähnlich zum Beweis des Satzes von Carathéodory und verwendet diesen auch. Im eben gezeigten Spezialfall haben wir die geeignete Teilfolge mit dem Satz von Helly gefunden. Mit dem gleichen Diagonalfolgenargument werden wir auch im allgemeinen Fall eine geeignete Teilfolge angeben können. Um den schwachen Grenzwert dieser Folge zu finden, werden wir zunächst einen Kandidaten als endlich additives Maß angeben und anschließend ein äußeres Maß daraus ableiten und durch Einschränkung ein W'Maß auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{S}$ erhalten. Entsprechend dieser Vorgehensart ist der hiesige Beweis unterteilt und findet sich in einer kurzen Variante im Buch von Klenke [2] und etwas ausführlicher in Billingsleys *Convergence of Probability Measures* [1], woran wir uns hier auch maßgeblich orientieren werden.

Eine dritte Beweisvariante findet sich in der online verfügbaren Mitschrift der Wahrscheinlichkeitstheorie I und II [4, Satz 10.1.17] von Michael Röckner. Diese setzt allerdings das Lemma von Urysohn voraus, worauf wir hier auch nicht näher eingehen werden.

3.3.2. Konstruktion der Teilfolge

Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Π. Da Π straff ist, existieren kompakte Mengen $\tilde{K}_l \subset S$, $l \in \mathbb{N}$, mit $\mu_n(\tilde{K}_l) > 1 - \frac{1}{l}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir $K_1 := \tilde{K}_1$ und $K_i = \tilde{K}_i \cup K_{i-1}$ für alle $i > 1$, so gilt weiterhin $\mu_n(K_l) \geq \mu_n(\tilde{K}_l) > 1 - \frac{1}{l}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Als endliche Vereinigung kompakter Mengen bleibt K_i kompakt und die Folge ist aufsteigend, also $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$. Mit Lemma 2.8 ist $\bigcup_{l\in\mathbb{N}} K_l$ separabel. Nun finden wir also mit Lemma 2.9 eine abzählbare Klasse $\mathcal{A}$ von offenen Mengen in S mit folgender Eigenschaft: Ist $x \in \bigcup_{l\in\mathbb{N}} K_l$ und $x \in G$ für ein $G \subset S$ offen, so existiert ein $A \in \mathcal{A}$ mit $x \in A \subset \overline{A} \subset G$.

Betrachte $\tilde{\mathcal{H}} = \left\{\overline{A} \cap K_m \mid m \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{A}\right\}$ und definiere

$$\mathcal{H} := \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{H}_j \mid n \in \mathbb{N}, \tilde{H}_j \in \tilde{\mathcal{H}} \right\} \cup \{\emptyset\} .$$

$\mathcal{H}$ ist eine abzählbare Klasse von kompakten Mengen. Mit dem Diagonalfolgenargument (wie im Beweis des Satzes von Helly) erhalten wir eine Teilfolge $(\mu_{n_k})_k$, sodass

$$\alpha(H) := \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}(H) \tag{3.1}$$

für alle $H \in \mathcal{H}$ existiert. Diese Teilfolge entsteht also dadurch, indem wir bei gegebener Abzählung $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots\}$ mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß konvergente Teilfolgen $(\mu_{n_k^i}(H_i))_k$ mit $(n_k^i)_k \subset (n_k^{i+1})_k$ für alle $i \in \mathbb{N}$ aussondern und abschließend die Diagonalfolge $n_k := n_k^k$ wählen, sodass $(\mu_{n_k}(H_i))_k$ für alle $i \in \mathbb{N}$ konvergiert. Auf diese reellen Folgen lässt sich jeweils der Satz von Bolzano-Weierstraß anwenden, weil diese durch 1 beschränkt sind.

Es sei noch bemerkt, dass jedes K_l, für welches endlich viele $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ mit $K_l \subset \bigcup_{j=1}^m A_j$ existieren, selbst in $\mathcal{H}$ liegt: Ist $K_l \subset \bigcup_{j=1}^m \overline{A}_j$ so betrachten wir die Darstellung $K_l = \bigcup_{j=1}^m \overline{A}_j \cap K_l \in \mathcal{H}$.

3.3.3. Ziel des Beweises

Wir wollen ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ finden, sodass

$$\mu(G) = \sup_{\mathcal{H} \ni H \subset G} \alpha(H) \tag{3.2}$$

für alle offenen $G \subset S$ gilt. Angenommen, wir haben ein solches μ gefunden und sei $G \subset S$ offen, so gilt

$$\mu(G) \underset{(3.1),\,(3.2)}{=} \sup_{\mathcal{H} \ni H \subset G} \underbrace{\lim_{k \to \infty} \mu_{n_k}(H)}_{= \liminf_k \mu_{n_k}(H) \underset{H \subset G}{\leq} \liminf_k \mu_{n_k}(G)} \leq \liminf_{k \to \infty} \mu_{n_k}(G)$$

Mit dem Portemanteau-Theorem (Satz 2.12) folgt nun sofort, dass $\mu = \text{w-}\lim_{k \to \infty} \mu_{n_k}$. Also ist der Satz von Prohorov damit bewiesen, wenn ein solches μ gefunden wurde. Die Angabe eines Kandidaten für μ mit der Eigenschaft (3.2) ist von nun an Rest des Beweises.

3.3.4. Kandidat für μ

Die Menge $\mathcal{H}$ ist per Definition unter endlichen Vereinigungen abgeschlossen. α besitzt folgende Eigenschaften:

$$\alpha(H_1) \leq \alpha(H_2) \qquad \text{für alle } H_1, H_2 \in \mathcal{H} \text{ mit } H_1 \subset H_2 \tag{3.3}$$

(Es ist $\alpha(H_1) = \lim_k \mu_{n_k}(H_1) \leq \lim_k \mu_{n_k}(H_2) = \alpha(H_2)$.)

$$\alpha(H_1 \cup H_2) = \alpha(H_1) + \alpha(H_2) \qquad \text{für alle } H_1, H_2 \in \mathcal{H} \text{ mit } H_1 \cap H_2 = \emptyset \tag{3.4}$$

($\alpha(H_1 \cup H_2) = \lim_k \mu_{n_k}(H_1 \cup H_2) = \lim_k(\mu_{n_k}(H_1) + \mu_{n_k}(H_2)) = \lim_k \mu_{n_k}(H_1) + \lim_k \mu_{n_k}(H_2) = \alpha(H_1) + \alpha(H_2)$, da sowohl für $H_1 \in \mathcal{H}$ als auch für $H_2 \in \mathcal{H}$ der Limes existiert, vergleiche (3.1).)

$$\alpha(H_1 \cup H_2) \leq \alpha(H_1) + \alpha(H_2) \qquad \text{für alle } H_1, H_2 \in \mathcal{H} \tag{3.5}$$

(Wie oben, wobei hier die Subadditivität der μ_{n_k} genutzt wird. Der Limes existiert weiterhin.)

$$\alpha(\emptyset) = 0 \tag{3.6}$$

($\lim_k \mu_{n_k}(\emptyset) = \lim_k 0 = 0$.)

Sei $G \subset S$ offen. Wir definieren

$$\beta(G) := \sup_{\mathcal{H} \ni H \subset G} \alpha(H) \tag{3.7}$$

β hat zwar die gewünschte Eigenschaft (3.2), doch muss es sich dabei nicht um ein W'Maß handeln. Wir können jedoch festhalten, dass β isoton und $\beta(\emptyset) = \alpha(\emptyset) = 0$ ist. Für beliebige Teilmengen $M \subset S$ definieren wir:

$$\gamma(M) := \inf_{M \subset G,\, G \text{ offen}} \beta(G) \tag{3.8}$$

(Somit gilt auch $\gamma(G) = \beta(G)$ für offenes $G \subset S$.) Wenn wir nun zeigen können, dass es sich bei γ um ein äußeres Maß handelt, haben wir ein $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ mit der benötigten Eigenschaft (3.2) gefunden:

Angenommen γ ist ein äußeres Maß. Die Menge $\mathcal{M}_\gamma$ aller γ-messbaren Mengen (Zerschneidemengen) ist eine σ-Algebra auf S und die Einschränkung $\gamma \restriction_{\mathcal{M}_\gamma}$ ist ein Maß auf $(S, \mathcal{M}_\gamma)$.

Sei weiter angenommen, dass jede abgeschlossene Menge $F \subset S$ γ-messbar ist (also in $\mathcal{M}_\gamma$ enhalten ist), so gilt $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_\gamma$ (da die Borel-σ-Algebra $\mathcal{S}$ durch die abgeschlossenen Mengen erzeugt wird) und die Restriktion

$$\mu := \gamma \restriction_{\mathcal{S}}$$

ist ein Maß auf $(S, \mathcal{S})$. Wegen der Definition von γ gilt auch die benötigte Eigenschaft (3.2), denn für eine offene Menge $G \subset S$ ist $\mu(G) = \gamma(G) = \beta(G) = \sup_{\mathcal{H} \ni H \subset G} \alpha(H)$. μ ist sogar ein W'Maß und dies folgt (wie im Spezialfall $S = \mathbb{R}$) aus der Straffheit von Π:

$$1 \geq \mu(S) = \beta(S) \geq \sup_{l \in \mathbb{N}} \alpha(\underbrace{K_l}_{\in \mathcal{H}}) \geq \sup_{l \in \mathbb{N}} (1 - \frac{1}{l}) = 1$$

Abschließend sei in Abbildung 3.1 noch einmal grafisch veranschaulicht, wie wir

$$
\begin{tikzcd}
\text{Straffheit} \arrow[r, squiggly] & \text{Klasse } \mathcal{H} \arrow[d, squiggly] & \text{offene Mengen} & \mathcal{P}(S) & \mathcal{B}(S) = \mathcal{S} \\
\text{Diagonal-argument} \arrow[r, squiggly] & \lim_k \mu_{n_k}(H) := \alpha(H) \arrow[r, squiggly] & \beta(G) \arrow[r, squiggly] & \gamma(M) \arrow[r, squiggly] & \mu = \gamma \restriction_{\mathcal{S}} \\
 & \mu_{n_k} \arrow[urrr, dotted, "\text{schwach}"] & & \text{äußeres Maß} & \text{W'Maß}
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 3.1.: Konstruktion von μ

unter den beiden eben formulierten Behauptungen an das W'Maß μ gelangt sind.

Die folgenden beiden Abschnitte beschäftigen sich nur noch mit diesen beiden Behauptungen und wir werden diese in sechs Schritten beweisen.

3.3.5. γ ist äußeres Maß

Wir formulieren folgende Behauptungen:

(1) *Ist $F \subset G$, F abgeschlossene und G offene Teilmenge von S und gilt zusätzlich $F \subset H$ für ein $H \in \mathcal{H}$, dann existiert ein $H_0 \in \mathcal{H}$ mit $F \subset H_0 \subset G$.*

Beweis von (1). Sei $x \in F$, dann folgt zunächst $x \in G$ und $x \in \bigcup_{l \in \mathbb{N}} K_l \, (= S)$. Somit existiert nach Konstruktion von $\mathcal{A}$ ein $A_x \in \mathcal{A}$ offen, sodass $x \in A_x \subset \overline{A_x} \subset G$. Es gilt $F \subset \bigcup_{x \in F} A_x$ und da F als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge H selbst kompakt ist, gibt es endlich viele $A_{x_1}, \ldots, A_{x_k} \in \{A_x \mid x \in F\}$ mit $F \subset \bigcup_{j=1}^{k} A_{x_j} \subset \bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_{x_j}}$. Aus $F \subset H$ und $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ folgt, dass ein $l_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $F \subset K_{l_0}$. Also können wir $H_0 := \bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_{x_j}} \cap K_{l_0} \in \mathcal{H}$ wählen. Wegen $H_0 \subset \bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_{x_j}}$ gilt $H_0 \subset G$.

(2) *β ist endlich subadditiv auf offenen Teilmengen von S.*

Beweis von (2). Seien $G_1, G_2 \subset S$ offen und sei $H \in \mathcal{H}$ mit $H \subset G_1 \cup G_2$ beliebig. Wir betrachten folgende zwei Mengen:

$$
\begin{aligned}
F_1 &:= \{x \in H \mid d(x, G_2 \setminus G_1) \geq d(x, G_1 \setminus G_2)\} \\
F_2 &:= \{x \in H \mid d(x, G_1 \setminus G_2) \geq d(x, G_2 \setminus G_1)\}
\end{aligned}
$$

F_1 und F_2 sind abgeschlossen. In Abbildung 3.2 ist zu sehen, dass F_1 und F_2 in der Menge $G_1 \cap G_2$ (grau hinterlegt) getrennt werden und $F_i \subset G_i$, $i = 1, 2$, gilt, denn:

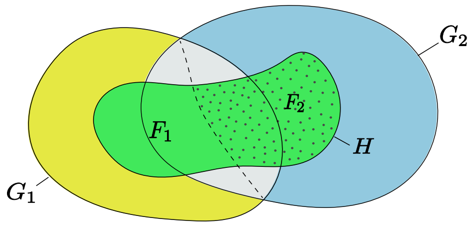

Abbildung 3.2.: Lage von F_1 und F_2 in H

Angenommen, es gibt ein $x \in F_1$ mit $x \notin G_1$, so gilt zunächst $x \in G_2$, weil $F_1 \subset H \subset G_1 \cup G_2$. Hieraus erhalten wir $d(x, G_2 \setminus G_1) = 0$ und auch $d(x, G_1 \setminus G_2) > 0$, denn sonst wäre x dennoch ein Element aus G_1. Mit der Definition von F_1 erhalten wir einen Widerspruch:

$$0 = d(x, G_2 \setminus G_1) \geq d(x, G_1 \setminus G_2) > 0.$$

Schließlich folgt hieraus $F_1 \subset G_1$ und analog $F_2 \subset G_2$. Als Teilmengen von $H \in \mathcal{H}$ gibt es nach (1) Mengen $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, sodass $F_1 \subset H_1 \subset G_1$ und $F_2 \subset H_2 \subset G_2$. Nun:

$$\alpha(H) \underset{(3.3)}{\leq} \alpha(H_1 \cup H_2) \underset{(3.5)}{\leq} \alpha(H_1) + \alpha(H_2) \underset{(3.7)}{\leq} \beta(G_1) + \beta(G_2)$$

Es folgt (da $H \in \mathcal{H}$ mit $H \subset G_1 \cup G_2$ beliebig gewählt war)

$$\beta(G_1 \cup G_2) \underset{(3.7)}{=} \sup_{\mathcal{H} \ni H \subset G_1 \cup G_2} \alpha(H) \leq \beta(G_1) + \beta(G_2).$$

Mit Induktion folgt nun die Behauptung.

(3) *β ist σ-subadditiv auf offenen Teilmengen von S.*

Beweis von (3). Seien $G_1, G_2, \ldots \subset S$ offene Mengen und sei $H \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} G_j$ beliebig. Da H kompakt ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $H \subset \bigcup_{j=1}^{n_0} G_j$. Die endliche Subadditivität aus (2) impliziert nun

$$\alpha(H) \leq \alpha(\bigcup_{j=1}^{n_0} G_j) = \beta(\bigcup_{j=1}^{n_0} G_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \beta(G_j).$$

Die Behauptung folgt nun durch die Definition von β:

$$\beta(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} G_j) \underset{(3.7)}{=} \sup_{\mathcal{H}\ni H\subset\bigcup_j G_j} \alpha(H) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \beta(G_j)$$

(4) γ *ist ein äußeres Maß.*

Beweis von (4). $\gamma(\emptyset) = 0$, $\gamma \geq 0$ und die Isotonie folgen direkt aus der Definition. Es bleibt also noch die σ-Subadditivität zu zeigen. Seien also $M_1, M_2, \ldots \subset S$ beliebig und sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei nun G_n eine offene Menge in S mit $G_n \supset M_n$ und $\beta(G_n) < \gamma(M_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. (Angenommen ein solches G_n existiert nicht, so gilt für alle $G_n \supset M_n$ die Ungleichung $\beta(G_n) \geq \gamma(M_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von γ als das Infimum von β über alle offenen Obermengen G_n von M_n.) Mit (3) gilt nun:

$$\gamma(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} M_j) \underset{(3.8)}{=} \inf_{\bigcup_j M_j\subset G, G \text{ offen}} \beta(G) \leq \beta(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} G_j) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \beta(G_j) \leq \varepsilon + \sum_{j\in\mathbb{N}} \gamma(M_j)$$

Da ε beliebig gewählt war, folgt mit $\varepsilon \searrow 0$ die σ-Subadditivität $\gamma(\bigcup_j M_j) \leq \sum_j \gamma(M_j)$.

3.3.6. Abgeschlossene Mengen sind γ-messbar

Es bleiben noch folgende Behauptungen zu zeigen:

(5) $\beta(G) \geq \gamma(F \cap G) + \gamma(F^{\mathsf{C}} \cap G)$ *für abgeschlossenes* $F \subset S$ *und offenes* $G \subset S$.

Beweis von (5). Sei $\varepsilon > 0$ und sei $H_1 \in \mathcal{H}$ so gewählt, dass $H_1 \subset F^{\mathsf{C}} \cap G$ (in Abbildung 3.3 ist dies der grüne Bereich) und $\alpha(H_1) > \beta(F^{\mathsf{C}} \cap G) - \varepsilon$ gilt. Sei nun $H_0 \in \mathcal{H}$ mit $H_0 \subset H_1^{\mathsf{C}} \cap G$ und $\alpha(H_0) > \beta(H_1^{\mathsf{C}} \cap G) - \varepsilon$. Wegen $H_0, H_1 \subset G$ und $H_0 \subset H_1^{\mathsf{C}}$ sind H_0 und H_1 disjunkte Teilmengen von G. In Abbildung 3.3 kann sich H_0 im gepunkteten Bereich befinden. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\beta(G) &\underset{(3.7)}{\geq} \alpha(H_0 \cup H_1) \underset{(3.4)}{=} \alpha(H_0) + \alpha(H_1) \\
&> \beta(H_1^{\mathsf{C}} \cap G) + \beta(F^{\mathsf{C}} \cap G) - 2\varepsilon \\
&\underset{(3.8)}{\geq} \gamma(F \cap G) + \gamma(F^{\mathsf{C}} \cap G) - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

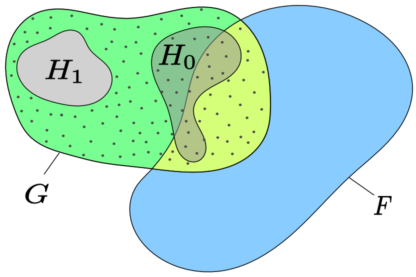

Abbildung 3.3.: Lage von H_0 und H_1 in $G \cup H$

Hierbei gilt $\gamma(F^\mathsf{C} \cap G) = \beta(F^\mathsf{C} \cap G)$, weil $F^\mathsf{C} \cap G$ offen ist. H_1 ist kompakt und insbesondere abgeschlossen, also ist H_1^C offen und somit gilt für $F \cap G \subset H_1^\mathsf{C}$ die Ungleichung $\beta(H_1^\mathsf{C} \cap G) \geq \gamma(F \cap G)$. $\varepsilon \searrow 0$ impliziert nun die Behauptung.

(6) *Ist $F \subset S$ abgeschlossen, so gilt $F \in \mathcal{M}_\gamma$.*

Beweis von (6). $F \in \mathcal{M}_\gamma$ gilt nach der Definition messbarer Mengen genau dann, wenn $\gamma(L) \geq \gamma(F \cap L) + \gamma(F^\mathsf{C} \cap L)$ für alle $L \subset S$ gilt (dies reicht zu zeigen, da wir bereits wissen, dass γ ein äußeres Maß ist). Sei also $L \subset S$. Mit (5) folgt zunächst für alle offenen $G \supset L$

$$\beta(G) \geq \gamma(F \cap G) + \gamma(F^\mathsf{C} \cap G) \underset{L \subset G}{\geq} \gamma(F \cap L) + \gamma(F^\mathsf{C} \cap L).$$

Nehmen wir nun das Infimum über alle offenen $G \supset L$, so folgt

$$\gamma(L) \underset{(3.8)}{=} \inf_{L \subset G, G \text{ offen}} \beta(G) \geq \gamma(F \cap L) + \gamma(F^\mathsf{C} \cap L).$$

Also ist F γ-messbar.

Damit ist der Satz von Prohorov vollständig bewiesen. $\square$

4. Anwendungen

Es sei daran erinnert, dass es sich bei S weiterhin um einen metrischen Raum mit induzierter Borel-σ-Algebra $\mathcal{S}$ und Metrik d handelt. In diesem Kapitel nutzen wir die Bücher von Billingsley [1] und Klenke [2].

4.1. Schwache Konvergenz von Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen

In diesem Abschnitt wollen wir uns wieder mit der anfänglichen Fragestellung beschäftigen, wann eine Folge von W'Maßen auf einem metrischen Raum schwach konvergiert. Mit dem folgenden Resultat stellen wir zunächst fest, dass beliebige Folgen von W'Maßen auf kompakten, metrischen Räumen – ohne die Straffheit dieser Folge fordern zu müssen – immer schwache Häufungspunkte und somit einen Kandidaten für einen schwachen Grenzwert besitzen.

Folgerung 4.1. *Sei S kompakt, dann ist die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{M}_1(S)$ relativ kompakt.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, so gilt

$$\mu(S) = 1 > 1 - \varepsilon.$$

S ist nach Voraussetzung kompakt. Somit ist $\mathcal{M}_1(S)$ straff und mit Satz 3.1 relativ kompakt. $\square$

Mit dem Satz von Prohorov haben wir gesehen, dass straffe Folgen von W'Maßen auf metrischen Räumen immer schwach konvergente Teilfolgen besitzen. In polnischen Räumen können wir mit der Zusatzbedingung einer sog. trennenden Familie die schwache Konvergenz der ganzen Folge sicherstellen.

Folgerung 4.2. *Sei S polnisch und sei $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \in \mathcal{M}_1(S)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mu = \text{w-}\lim_{n\to\infty} \mu_n$.

(ii) $\{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *ist straff und es gibt $\mathcal{T} \subset \mathcal{C}_b(S)$, $\mathcal{T} \neq \emptyset$, mit*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f \,\mathrm{d}\mu_n \quad \textit{für alle } f \in \mathcal{T}. \tag{4.1}$$

($\mathcal{T}$ wird auch trennende Familie genannt.)

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Wegen $\mu = \text{w-}\lim_{n\to\infty} \mu_n$ und Satz 2.14 ist die Menge $\{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt und nach Satz 3.1 in polnischen Räumen auch straff. (4.1) ist nach Definition der schwachen Konvergenz für $\mathcal{T} = \mathcal{C}_b(S)$ immer erfüllt.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Angenommen $(\mu_n)_n$ konvergiert nicht schwach gegen μ, so existieren ein $\varepsilon > 0$, ein $f \in \mathcal{C}_b(S)$ und eine Teilfolge $(\mu_{n_k})_k$ mit

$$\left| \int f \,\mathrm{d}\mu_{n_k} - \int f \,\mathrm{d}\mu \right| > \varepsilon. \tag{4.2}$$

Die Straffheit der Folge impliziert durch den Satz von Prohorov nun die relative Kompaktheit, also gibt es eine Teilfolge $(\mu_{\tilde{n}_k})_k$ von $(\mu_{n_k})_k$ und ein $\nu \in \mathcal{M}_1(S)$ mit $\nu = \text{w-}\lim_{k\to\infty} \mu_{\tilde{n}_k}$. Aus (4.2) folgt nun zunächst

$$\left| \int f \,\mathrm{d}\mu - \int f \,\mathrm{d}\nu \right| \geq \varepsilon$$

und somit $\nu \neq \mu$. Andererseits erhalten wir jedoch

$$\int g \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int g \,\mathrm{d}\mu_{\tilde{n}_k} = \int g \,\mathrm{d}\nu \quad \forall\, g \in \mathcal{T}$$

nach (4.1) und somit die Gleichheit $\nu = \mu$. Widerspruch! ☐

Abschließend betrachten wir noch das folgende Ergebnis für beliebige metrische Räume hinsichtlich der Konvergenz einer Folge von W'Maßen.

Folgerung 4.3. *Sei $(\mu_n)_n$ eine straffe Folge in $\mathcal{M}_1(S)$ (d.h. $\{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist straff) und sei $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$. Falls jede schwach konvergente Teilfolge gegen ein festes $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ konvergiert, so gilt $\mu = \text{w-}\lim_{n\to\infty} \mu_n$.*

Beweis. Da $\{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ straff ist, besitzt jede Teilfolge $(\mu_{n_k})_k \subset \{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach dem Satz von Prohorov durch die relative Kompaktheit eine schwach konvergente Teilfolge $(\mu_{\tilde{n}_k})_k$. Nach Voraussetzung gilt $\mu_{\tilde{n}_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{schwach}} \mu$. Mit Satz 2.14 folgt direkt die Behauptung, da nun jede Teilfolge eine schwach konvergente Teilfolge gegen den gleichen Limes besitzt. □

4.2. Laplace-Transformierte von Folgen

Wir wollen nun das letzte Ergebnis in einem abschließenden Beispiel nutzen um zu zeigen, dass man die schwache Konvergenz einer Folge auch anhand ihrer Laplace-Transformierten charakterisieren kann.

Beispiel 4.4. Wir betrachten den Halbstrahl $S = [0, \infty)$ und die Borel-σ-Algebra $\mathcal{S} = \mathcal{B}([0, \infty))$. Für $\lambda \geq 0$ ist die Laplace-Transformierte eines W'Maßes $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ definiert als

$$\mathfrak{L}(\mu, \lambda) := \int_{[0,\infty)} e^{-\lambda t}\, \mu(\mathrm{d}t).$$

Die Laplace-Transformierte legt das W'Maß μ nach Satz A.1 eindeutig fest. Sei nun $(\mu_n)_n \subset \mathcal{M}_1(S)$.

<u>Behauptung:</u> $\quad \mu = \text{w-lim}_{n\to\infty} \mu_n \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{L}(\mu_n, \lambda) \xrightarrow{n\to\infty} \mathfrak{L}(\mu, \lambda) \quad$ für alle $\lambda \geq 0$.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Für alle $\lambda \geq 0$ ist $e^{-\lambda t} \in \mathcal{C}_b(S)$. Die Behauptung folgt direkt aus der Definition der schwachen Konvergenz.

„$\Leftarrow$“: Wir betrachten zunächst für alle $u > 0$, $\lambda \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u}\int_0^u \left(1 - \mathfrak{L}(\mu_n, \lambda)\right) \mathrm{d}\lambda &= \frac{1}{u}\int_{[0,\infty)} \int_0^u \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \mathrm{d}\lambda\, \mu_n(\mathrm{d}t) \\
&\geq \frac{1}{u}\int_{(\frac{1}{u},\infty)} \int_0^u \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \mathrm{d}\lambda\, \mu_n(\mathrm{d}t) \\
&\geq \frac{1}{u}\int_{(\frac{1}{u},\infty)} \int_0^u \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{u}}\right) \mathrm{d}\lambda\, \mu_n(\mathrm{d}t) \\
&= \frac{1}{u}\left(\int_0^u \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{u}}\right) \mathrm{d}\lambda\right) \mu_n\left((\frac{1}{u}, \infty)\right) \\
&= \frac{1}{e}\, \mu_n\left((\frac{1}{u}, \infty)\right) \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $\mathfrak{L}(\mu, \cdot)$ stetig ist und $\mathfrak{L}(\mu, 0) = 1$ gilt, existiert ein $u > 0$ mit $\frac{1}{u}\int_0^u (1 - \mathfrak{L}(\mu, \lambda))\,\mathrm{d}\lambda < \frac{\varepsilon}{e}$. Nach Voraussetzung gilt $\mathfrak{L}(\mu_n, \lambda) \xrightarrow{n\to\infty} \mathfrak{L}(\mu, \lambda)$ für alle $\lambda \geq 0$, also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{u}\int_0^u (1 - \mathfrak{L}(\mu_n, \lambda))\,\mathrm{d}\lambda < \frac{\varepsilon}{e} \qquad \text{für alle } n \geq N. \tag{4.4}$$

Mit $p := \frac{1}{u}$ und (4.3) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu_n([0, p]) &= 1 - \mu_n\left((p, \infty)\right) \\ &\underset{(4.3)}{\geq} 1 - e\,\underbrace{p\int_0^{\frac{1}{p}} \left(1 - \mathfrak{L}(\mu_n, \lambda)\right)\,\mathrm{d}\lambda}_{<\frac{\varepsilon}{e} \text{ nach (4.4)}} \\ &> 1 - \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N. \end{aligned}$$

Durch ausreichende Vergrößerung von p können wir dieses Ergebnis auf alle μ_n mit $n \leq N$ ausweiten. Damit ist die Menge $\{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ straff. Sei nun $(\mu_{n_k})_k$ eine schwach konvergente Teilfolge mit Grenzwert $\nu \in \mathcal{M}_1(S)$. Mit „$\Rightarrow$“folgt zunächst $\mathfrak{L}(\mu_{n_k}, \lambda) \xrightarrow{k\to\infty} \mathfrak{L}(\nu, \lambda)$. Nach Voraussetzung gilt $\mathfrak{L}(\nu, \lambda) = \mathfrak{L}(\mu, \lambda)$, sodass durch den Eindeutigkeitssatz A.1 $\nu = \mu$ folgt. Also gilt $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{schwach}} \mu$ mit Folgerung 4.3. $\square$

A. Anhang

Folgender Satz wird von uns nur im letzten Beispiel benötigt und soll hier nur zitiert werden.

Satz A.1 (Eindeutigkeit der Laplace-Transformierten)**.** *Ein Maß auf dem Halbstrahl* $[0, \infty)$ *mit Borel-*σ*-Algebra* $\mathcal{B}([0, \infty))$ *ist genau dann endlich, wenn die Laplace-Transformierte* $\mathfrak{L}(\mu, \lambda)$ *für alle* $\lambda \geq 0$ *endlich ist. Das Maß* μ *ist dann eindeutig bestimmt durch seine Laplace-Transformierte.*

Beweis. Siehe Satz 1.2 in [7].

B. Literaturverzeichnis

[1] Patrick Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, 1999.

[2] Achim Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer-Verlag, 2008.

[3] Richard Durrett, *Stochastic Calculus*: *A Practical Introduction*, CRC Press, 1996.

[4] Michael Röckner, *Wahrscheinlichkeitstheorie I & II*, 2011. Mitschrift der Vorlesung.

[5] Heinz Bauer, *Maß- und Integrationstheorie*, de Gruyter, 1992.

[6] Manfred Dobrowolski, *Angewandte Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, 2010.

[7] René Schilling, Renming Song und Zoran Vondraček, *Bernstein Functions: Theory and Applications*, de Gruyter, 2010.

[8] Heinz Bauer, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, de Gruyter, 2002.

[9] Hans Wilhelm Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, 2006.

C. Erklärung

Ich versichere hiermit, die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Reidar Janssen
Bielefeld, den 12.09.2011